

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapă locală

CLASA a XI-a

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.
- Timp efectiv de lucru: 3 ore

1. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1 > 0$ și $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \ln(x_{n+1})$, $n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$.

Gazeta Matematică

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

- Să se calculeze $2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2025A^{2024}$.
- Să se calculeze $(I_3 + A)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Să consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \dots \cdot \cos^n nx)}{x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Calculați x_1 și x_2 .
- Calculați x_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A \cdot B - B \cdot A = A$. Arătați că matricea A nu este inversabilă.